

Heute: • Nachbesprechung MC Serie 5

• Lagrange Multiplikatoren (Optimieren mit Nebenbedingung)

Serie 5

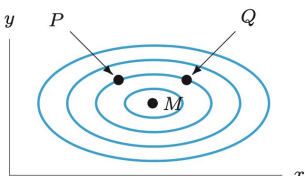
Die untenstehende Abbildung zeigt die Niveaulinien einer Funktion $f(x, y)$ um ein Minimum oder Maximum M .

Einer der beiden Punkte P und Q hat die Koordinaten (x_1, y_1) , der andere hat die Koordinaten (x_2, y_2) . Wir nehmen an, dass $b > 0$ und $c > 0$.

Betrachten Sie die folgenden linearen Näherungen an die Funktion f , einmal um den Punkt P und einmal um den Punkt Q .

$$f(x, y) \approx a + b(x - x_1) + c(y - y_1)$$

$$f(x, y) \approx k + m(x - x_2) + n(y - y_2)$$



1. Was gilt für a und k ?

2. Was sind die Koordinaten von P und Q ?

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

3. Ist M ein Maximum oder Minimum?

4. Was haben m und n für Vorzeichen?

5.4 Extrema unter Nebenbedingungen

Wir betrachten nun bedingte Optimierungsprobleme, also wir suchen Minima (oder Maxima) einer Funktion f nicht mehr auf einer offenen Menge, sondern auf einer Menge $M := \{(x, y) \in U : g(x, y) = 0\} \neq \emptyset$, die gegeben ist durch eine Nebenbedingung $g(x, y) = 0$. Dabei ist $g(x, y)$ eine Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g(x, y) = 0$ ist damit eine Niveaumenge dieser Funktion und parametrisiert eine Teilmenge in U – nämlich genau alle Punkte $(x, y) \in U$, die $g(x, y) = 0$ erfüllen resp. die Nullstellenmenge von g . Aus allen diesen Punkten $(x, y) \in M$, wollen wir nun die Extrema unserer Funktion f finden.

Wie löst man so ein Problem?

Bemerkung 5.8 (INTUITION HINTER LAGRANGE-MULTIPLIKATOREN)

Wir wissen, dass wir uns, um auf der Niveaulinie $g(x, y) = 0$ zu bleiben uns orthogonal zu ∇g bewegen müssen (siehe 4.22). Damit wir einen kritischen Punkt von f finden müssen wir eine Stelle auf $g(x, y) = 0$ finden, sodass wenn wir uns infinitesimal auf $g(x, y) = 0$ bewegen, sich f nicht ändert – wir halten uns also lokal auf einer Niveaulinie von f auf. Dafür muss an dieser Stelle ∇f also orthogonal zur Bewegungsrichtung zeigen, da wir unseren Funktionswert lokal nicht ändern wollen. Damit sind sowohl ∇f als auch ∇g orthogonal zur Bewegungsrichtung und damit parallel. Es gilt notwendigerweise für einen kritischen Punkt damit

$$\nabla f = \lambda \nabla g \iff \nabla f - \lambda \nabla g = 0.$$

Satz 5.9 (LAGRANGE MULTIPLIKATOREN)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und seien f, g Funktionen in $C^1(U, \mathbb{R})$. Sei

$$M := \{(x, y) \in U : g(x, y) = 0\} \neq \emptyset,$$

und es sei angenommen, dass $f|_M$ ein lokales Extremum bei $(x_0, y_0) \in M$ hat. Dann existiert eine reelle Zahl $\lambda \neq 0$, sodass

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0.$$

Mit anderen Worten, die Vektoren $\nabla f(x_0, y_0)$ und $\nabla g(x_0, y_0)$ sind linear abhängig.

Bemerkung 5.10 (LAGRANGE-FUNKTION)

Man kann in der Praxis die sogenannte **Lagrange-Funktion** definieren als:

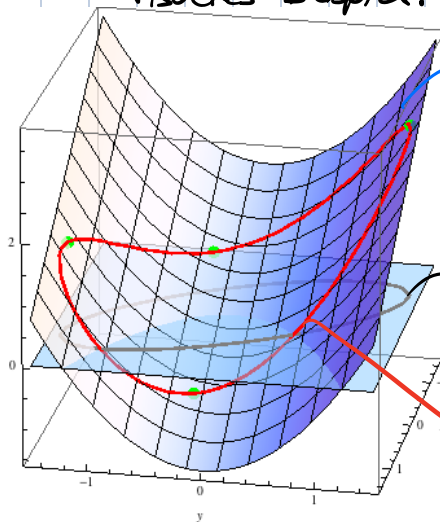
$$\mathcal{L}: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

Die Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ wird als **Lagrange-Multiplikator** bezeichnet. Dann besagt Satz 5.9 dass, wenn (x_0, y_0) ein lokales Minimum für das Nebenbedingungsproblem ist, ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass die Gleichungen

$$\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_\lambda \mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda) = 0$$

erfüllt sind.

Visuelles Beispiel:



Graph von f

Niveaulinie $g(x, y) = 0$

hier z.B.: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Denn $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ist der Einheitskreis in der xy -Ebene

Nur die Punkte auf dem Graphen von f , die die Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ erfüllen.

Also jene Inputpunkte (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$.

Allgemeines Vorgehen:

Rechenmethode 5.11 (LAGRANGE MULTIPLIKATOREN)

Ein Minimum einer Funktion mit Nebenbedingungen können wir mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren finden. Dafür können wir wie folgt vorgehen:

1. Lagrange-Funktion definieren
2. Ableitungen berechnen
3. Gleichungssystem lösen
4. Einsetzen und Lösung finden

Grundsätzliche Bemerkung: Die Extrema unter Nebenbedingungen haben nichts mit dem Extremum von f zu tun! (siehe Beispiel oben)

Beachte: Wenn die Nebenbedingung kompakt (abgeschlossen und beschränkt) ist, dann gilt der Satz von Weierstrass (Analysis A), der sagt: Jede stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge ihr Maximum und Minimum an!

Beispiel 5.12 (LAGRANGE AUF EINEM EBENENSCHNITT)

Betrachten wir die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$ die minimiert werden soll unter der Nebenbedingung $x + y = 1$.

SCHRITT 1: LAGRANGE-FUNKTION DEFINIEREN

Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \overbrace{x^2 + y^2}^{\text{f}} - \overbrace{\lambda(x + y - 1)}^{\text{g}}.$$

SCHRITT 2: ABLEITUNGEN BERECHNEN

Die notwendigen Bedingungen für ein Extremum sind:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

Aufgabe:

Aufgabe [2023 S] Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Sei zudem $g(x, y) = x^2 + y^2$. Wir schränken die Argumente der Funktion $f(x, y)$ auf den Kreis

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 1\}$$

ein. In diesem Fall nimmt die Funktion $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 1$

- (A) in $(0, 1)$ ihr bedingtes Maximum an.
- (B) in $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ und $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ihr bedingtes Maximum an.
- (C) in $(0, -1)$ ihr bedingtes Maximum an.
- (D) in $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ und $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ihr bedingtes Maximum an.

SCHRITT 3: GLEICHUNGSSYSTEM LÖSEN

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt:

$$2x = \lambda \quad \text{und} \quad 2y = \lambda \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y.$$

Setzen wir dies in die Nebenbedingung ein:

$$x + x = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

SCHRITT 4: EINSETZEN UND LÖSUNG FINDEN

Die Grenzwerte im unendlichen divergieren gegen unendlich. Daher ist das Minimum der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Bedingung $x + y = 1$ liegt bei

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit Funktionswert} \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Rechenmethode 5.11 (LAGRANGE MULTIPLIKATOREN)

Ein Minimum einer Funktion mit Nebenbedingungen können wir mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren finden. Dafür können wir wie folgt vorgehen:

1. Lagrange-Funktion definieren
2. Ableitungen berechnen
3. Gleichungssystem lösen
4. Einsetzen und Lösung finden